1.1.3 Berechnete Messgröße: Messabweichung und Messunsicherheit

Sachworte: Messabweichung, Messunsicherheiten, Widerstandsmessung

Ein Messergebnis y berechnet sich aus den beiden fehlerbehafteten Messgrößen A und B sowie dem fehlerfreien Faktor k zu:

$$y = A(1+B)k \qquad (1)$$

Die Messung von A und B sei mit **systematischen Messabweichungen** behaftet, d.h. mit den Absolutwerten ΔA und ΔB, entsprechend den Relativwerten $\varepsilon_A = \Delta A/A$ und $\varepsilon_B = \Delta B/B$. Es wird von messtechnisch relevanten Werten $\varepsilon_A \ll 1$ und $\varepsilon_B \ll 1$ ausgegangen, sodass eine näherungsweise Rechnung erlaubt ist.

a) Ermitteln Sie die absoluten Messabweichung F_{abs} allgemein abhängig von ΔA, ΔB und dann abhängig von ε_A, ε_B sowie A und B.

$$F_{abs} = \sum \frac{\partial y}{\partial x_i}\Delta x_i = \frac{\partial y}{\partial A}\Delta A + \frac{\partial y}{\partial B}\Delta B = \left[(1+B)\Delta A + A\Delta B\right]k \qquad (2)$$

$$mit \quad \varepsilon_A = \frac{\Delta A}{A} \quad und \quad \varepsilon_B = \frac{\Delta B}{B}$$

$$\Rightarrow \quad F_{abs} = \left[(1+B)A\varepsilon_A + AB\varepsilon_B\right]k \qquad (3)$$

b) Berechnen Sie die relativen Messabweichung F_{rel} allgemein.

$$F_{rel} = \frac{F_{abs}}{y} = \frac{\left[(1+B)A\varepsilon_A + AB\varepsilon_B\right]k}{\left[A(1+B)\right]k} = \varepsilon_A + \frac{1}{1+1/B}\varepsilon_B \qquad (4)$$

c) Wie groß ist F_{rel} zahlenmäßig für ε_A = +2%; ε_B = -1 % bei A = 2,0; B = 1,0?

$$F_{rel} = \varepsilon_A + \frac{1}{1+1/B}\varepsilon_B = 2\% + \frac{1}{1+1/1{,}0}(-1\%) = 1{,}5\% \qquad (5)$$

A und B seien nun mit **statistischen Messunsicherheiten** behaftet und normalverteilt mit den Standardabweichungen s_A bzw. s_B.

e) Erläutern Sie den Begriff „statistische Messunsicherheit".

Bei Messwerten, die durch zufällige Einflüsse normalverteilt sind, wird als absolute statistische Messunsicherheit F_{wabs} das um den Mittelwert gelegte symmetrische Intervall der Breite 2s (s Standardabweichung) angenommen. In diesem Intervall liegen 68,3% der Messwerte oder anders formuliert, in diesem Intervall werden die Messwerte mit einer Aussagesicherheit von 68,3 % erwartet.

f) Wie lautet das „Gesetz zur Fortpflanzung von Messunsicherheiten"?

$$s(\bar{y}) = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 s_i^2} \qquad (6)$$

g) Wie groß ist die statistische Messunsicherheit F_{Wabs} abhängig von s_A, s_B sowie der relative F_{wrel} abhängig von ε_A, ε_B? Wie groß ist die zugehörige Aussagesicherheit?

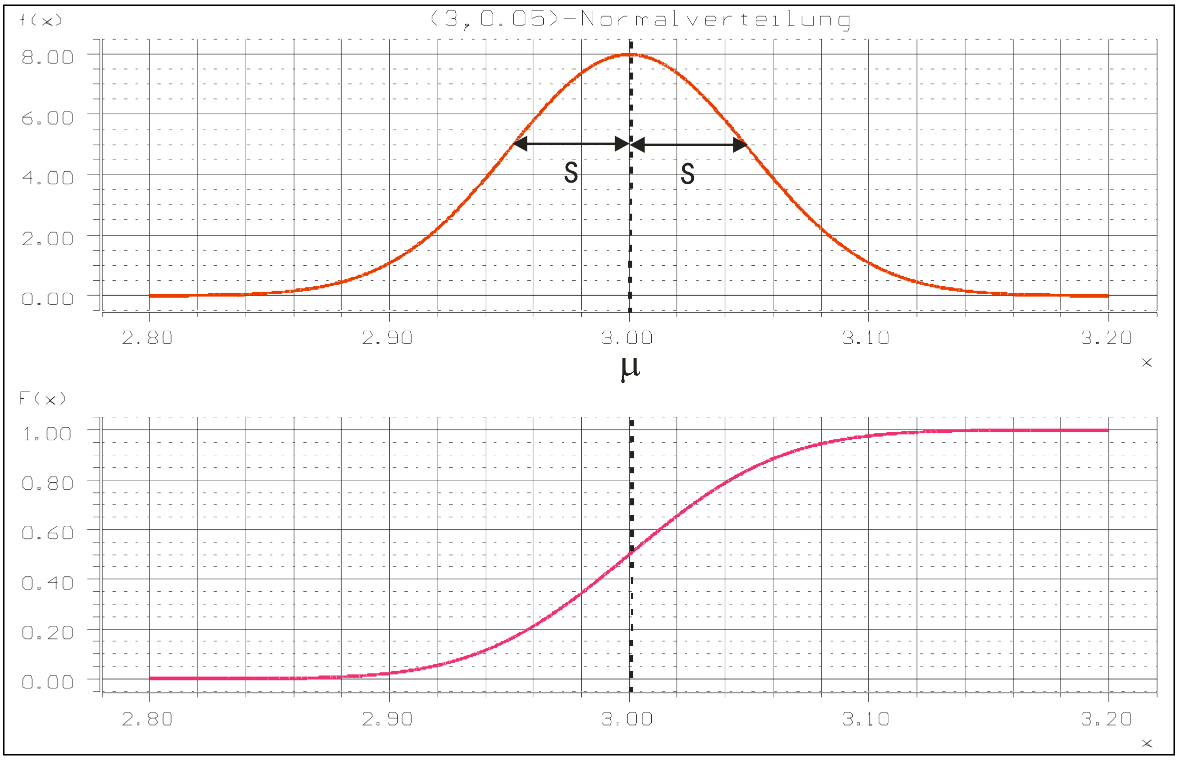
$$F_{Wabs} = 2s = 2\sqrt{\sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 s_i^2} = 2\sqrt{(1+B)^2\, s_A^2 + A^2 s_B^2} \qquad (7)$$

$$F_{Wrel} = \frac{F_{Wabs}}{y} = 2\sqrt{\varepsilon_A^2 + \left(\frac{1}{1+1/B} \right)^2 \varepsilon_B^2} \qquad (8)$$

Die Aussagesicherheit beträgt 68,3 %.

h) Skizzieren Sie die den Verlauf der Dichtefunktion f(x) und tragen Sie die relevanten Parameter in das Diagramm ein.

Im Beispiel werden Messwerte betrachtet, die normalverteilt sind mit einem Mittelwert $\mu = 3{,}0$ und einer Standardabweichung $s = 0{,}05$. Die in der Statistik übliche Dichtefunktion berechnet sich aus der im Buch verwendeten Häufigkeit H bezogen auf die Zahl der Messwerte. Die Summenfunktion entsteht durch Integration der Dichtefunktion und stellt eine Wahrscheinlichkeit dar mit dem Wertebereich von 0 bis 1.


f(x)
(3, 0.05)-Normalverteilung
8.00
6.00
4.00
2.00
0.00
s
s
2.80
2.90
3.00
3.10
3.20
μ
x
F(x)
1.00
0.80
0.60
0.40
0.20
0.00
2.80
2.90
3.00
3.10
3.20
x