1.1.6 Messdatenauswertung

Sachworte: Messdatenauswertung, Messreihen, Messunsicherheit, Stichprobe, Schätzwert, Mittelwert, Standardabweichung, Gauß-Verteilung, Normal-Verteilung, Dichteverteilung, Mittelwertbildung

Die Messung eines Widerstandes R, die mit zufälligen gaußverteilten (normalverteilten) Messunsicherheiten behaftet ist, ergab 8 unterschiedliche Messwerte:

Messung i	1	2	3	4	5	6	7	8
R in Ω	995	993	1006	994	1003	1001	1005	999

a) Durch welche Parameter ist eine Gauß-Verteilung gekennzeichnet?

Es genügen die beiden Parameter Mittelwert und Standardabweichung.

Für den Fall hinreichend großer Messreihen wird der Mittelwert mit μ und die Standardabweichung mit σ bezeichnet. Für die Rechnung bei endlich großen Stichproben (Messreihen) werden wie hier in der Aufgabe die Symbole $\overline{R}$ und s verwendet.

b) Wie groß sind der Schätzwert $\overline{R}_E$ des Mittelwertes und die Standardabweichung s_E der Einzelmesswerte?

Nachdem der wahre Wert der Spannung U wegen der endlichen Zahl von 8 Messwerten nicht bekannt ist, wird bei der Mittelwertbildung ersatzweise der Schätzwert herangezogen. Die Kennzeichnung mit dem Index E weist auf die Auswertung von Einzelmesswerten hin. Damit lautet der Schätzwert des Mittelwertes der Einzelmesswerte:

$$\overline{U}_E = \widehat{\overline{U}}_E = \frac{\sum_{i=1}^{N} U_i}{N} = \frac{(995+993+1006+994+1003+1001+1005+999)\,\Omega}{8} = 999{,}5\ \Omega \qquad (1)$$

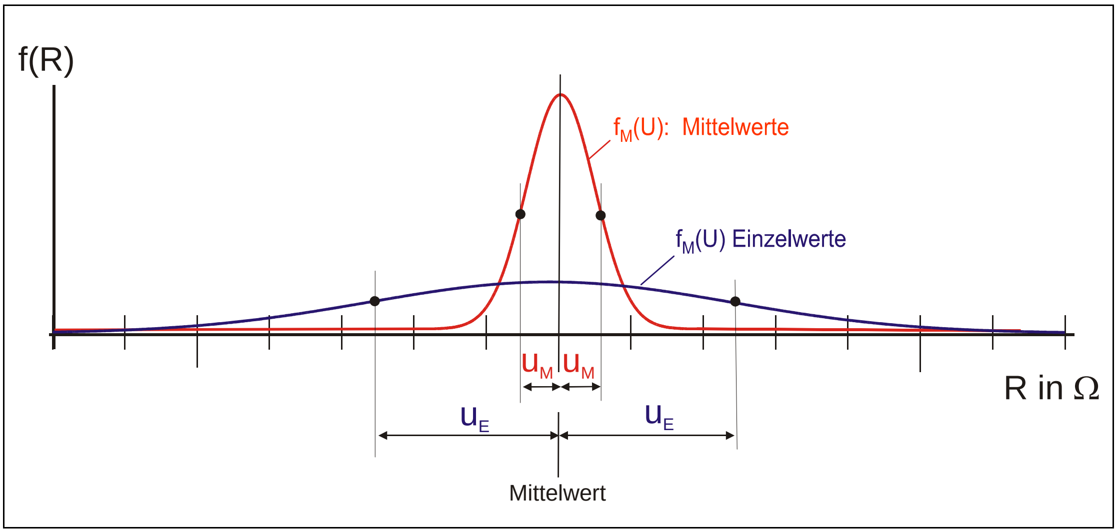
$$s_E = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}\left(U_i - \hat{x}_E\right)^2}{N-1}} = 5{,}1\ \Omega \qquad (2)$$

c) Zeichnen Sie mit den in b) ermittelten Parametern den Verlauf der Dichtefunktion $f_E(R)$, wie sie für große Messreihen gültig wäre.

Im Buch ist in Bild 1.11 der Verlauf der absoluten Häufigkeit H aufgetragen, der bis auf die Skalierung der y-Achse mit dem Verlauf der in der Statistik definierten sog. „Dichtefunktion f“ (untenstehendem Diagramm) identisch ist. Dazu wird H durch die Anzahl N aller betrachteten Messwerte und durch die Intervallbreite ΔR (hier in der Einheit „Ω“) dividiert.

Im f(R)-Diagramm wird auf der Abszisse das sog. Merkmal, hier der Widerstandswert R in Ω, aufgetragen. Das Maximum der Kurve liegt beim Mittelwert.

Zum Zeichnen der Dichtefunktion wird angenommen, dass die verwendeten Parameter nach Gl. (1) und Gl. (2) nicht nur aus 8 Messwerten sondern aus einer hohen (unendlichen) Zahl von Messwerten ermittelt wurden und demnach hinreichend sicher sind. Die gegebenen 8 Messwerte werden also nicht exakt auf der f(R)-Kurve zu finden sein.



d) Wie groß ist die absolute Messunsicherheit u_E der Einzelmesswerte mit einer Aussagesicherheit von 68,3 % bzw. 95,5 %?

Bei einer geringen Anzahl von Messwerten ist der sog. Student-Faktor t zu berücksichtigen. Er hängt von der Zahl der Messwerte und von der gewünschten Aussagesicherheit ab und ist im Buch in der Tabelle 1.8 aufgelistet.
Für N = 8 Messwerte und eine Aussagesicherheit von 68,3 % entnimmt man den Wert t = 1,08, für eine Aussagesicherheit von 95,5 % den Wert t = 2,50 .

Mit diesem Student-Faktor ist die empirische Standardabweichung zu multiplizieren, um die Messunsicherheit u zu erhalten.

68,3 % Aussagesicherheit: $u_E = 1{,}08\ s_E = 5{,}5\ \Omega$ (3)

99,7 % Aussagesicherheit: $u_E = 2{,}50\ s_E = 12{,}8\ \Omega$ (4)

Der Messwert wird dann z.B. angegeben in der Form:

$R = 999{,}5\ \Omega \pm 5{,}5\ \Omega$ *bzw.* $R = 999{,}5\ \Omega \pm 12{,}8\ \Omega$ (5)

Die Messreihe mit je 8 Einzelmessungen wird M = 25 mal wiederholt und für jede Messreihe ein Mittelwert gebildet.

e) Wie groß ist der Schätzwert $\hat{\hat{R}}_M$ des Mittelwertes dieser Mittelwerte und die Standardabweichung s_M dieser Mittelwerte, wenn angenommen wird, dass sich die Standardabweichung s_E der Einzelmesswerte nicht ändert.

Im Buch Kapitel 1.4.3.1 sind unter „Mittelwert und Standardabweichung beim mehrmaligen Messen derselben Messgröße“ die Herleitungen zur Behandlung von Mittelwerten zu finden mit der Formel (1.50).

$$\hat{\hat{U}}_M = \hat{\hat{U}}_E \qquad (6)$$

$$s_M = \frac{s_E}{\sqrt{M}} = \frac{s_E}{5} = 1{,}014\,mV \qquad (7)$$

f) Worin liegt der Gewinn der wiederholten Messungen?

Gemäß Gl. (7) hat sich die Standardabweichung s_M der Mittelwerte um den Faktor 5 gegenüber der Standardabweichung der Einzelmesswerten Gl. (2) verringert. Sie beträgt nur noch 1 mV gegenüber 5 mV. Die rein zufälligen Fehler (Messunsicherheiten) können im Gegensatz zu rein systematischen Fehlern nicht korrigiert werden. Sie lassen sich aber durch den erhöhten Aufwand des M-fachen Messens um den Faktor $\sqrt{M}$ verringern.

g) Tragen Sie in das Diagramm von c) auch die Verteilungsfunktion der Mittelwerte ein.

Die Lösung ist in das Diagramm von c) eingetragen.

Die beiden Kurven der Einzelmesswerte und der Mittelwerte zeigen zwei typische Eigenschaften einer Dichtefunktion. Das Kurvenmaximum liegt beim Mittelwert und die von der Kurve eingeschlossene Fläche ist immer gleich 1, da das Kurvenintegral eine Wahrscheinlichkeit mit dem Maximalwert von 1 darstellt.

Demnach liegen die Maxima beider Kurven beim selben Mittelwert. Die Kurve mit der größeren Standardabweichung verläuft flacher und niedriger, die mit der kleineren Standardabweichung deutlich schmäler und höher.