1.2.2 Frequenzverhalten einer Hochpass-Schaltung

Sachworte: Frequenzgang, Übertragungsfunktion, Amplitudengang, Phasengang, RC-Hochpass

Diese Aufgabe ist praktisch identisch der Aufgabe 1.2.1. Nur wird jetzt eine „CR-Schaltung“ (Bild 1) mit vertauschten Positionen der Komponenten R und C analysiert. Da die Behandlung der RC-Schaltung in Aufgabe 1.2.1 ausführlich erklärt wurde, sind hier die Kommentare knapper gehalten.

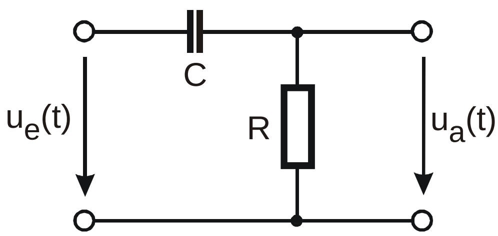

Bild 1

a) Frequenzgang (Übertragungsfunktion)

a1) Geben Sie für die CR-Schaltung von Bild 1 den komplexen Frequenzgang $\underline{G}(jf) = \underline{U}_a(f) / \underline{U}_e(f)$ an.

$$\underline{G}(jf) = \frac{\underline{U}_a}{\underline{U}_e} = \frac{R}{R + \underline{Z}(C)} = \frac{R}{R + 1/j2\pi fC} = \frac{j2\pi fRC}{1 + j2\pi fRC} \tag{1}$$

a2) Spalten Sie den Frequenzgang in seinen Realteil Re{$\underline{G}$(jf)} und Imaginärteil Im{$\underline{G}$(jf)} auf.

Gl. (1) liefert:

$$\underline{G}(jf) = \frac{j2\pi fRC}{1 + j2\pi fRC} \cdot \frac{1 - j2\pi fRC}{1 - j2\pi fRC} = \frac{(2\pi fRC)^2 + j2\pi fRC}{1 + (2\pi fRC)^2} \tag{2}$$

Realteil und Imaginärteil sind:

$$Re\{\underline{G}(jf)\} = \frac{(2\pi fRC)^2}{1 + (2\pi fRC)^2} \tag{3}$$

$$Im\{\underline{G}(jf)\} = \frac{2\pi fRC}{1 + (2\pi fRC)^2} \tag{4}$$

b) Amplitudengang

b1) Geben Sie den Amplitudengang G(2πf) = |G(j2πf)| an.

$$G(f) = |\underline{G}(jf)| = \left|\frac{\underline{U}_a}{\underline{U}_e}\right| = \frac{U_a}{U_e} = \sqrt{Re^2 + Im^2}$$

$$G(f) = \sqrt{\frac{(2\pi fRC)^2\left[1+(2\pi fRC)^2\right]}{\left[1+(2\pi fRC)^2\right]^2}} = \frac{2\pi fRC}{\sqrt{1+(2\pi fRC)^2}} \qquad (5)$$

b2) Welchen Wert hat der Amplitudengang für den Grenzfall f = 0 Hz?

Gl. (5) liefert:

$$G(f = 0Hz) = 0 \quad ; \quad U_a = 0V \qquad (6)$$

Gleichsignale (Frequenz f = 0 Hz) werden also nicht übertragen.

b3) Wie lautet der Amplitudengang für hohe Frequenzen 2πfR >> 1?

In diesem Fall darf im Nenner von Gl. (5) der Zahlenwert 1 vernachlässigt werden und es ergibt sich:

$$G(2\pi f >> 1) = \frac{U_a}{U_e} = 1 \quad ; \quad U_a = U_e \qquad (7)$$

Der Kondensator C lässt die hochfrequenten Signale ungehindert passieren. Die Schaltung ist also ein „Hochpass“.

b4) Wie lautet der Amplitudengang für niedrige Frequenzen 2πfR << 1?

In diesem Fall wird der Nenner von Gl. (5) annähernd 1 und es ergibt sich:

$$G(2\pi f << 1) = \frac{U_a}{Ue} = 2\pi fRC \qquad (8)$$

c) Grenzfrequenz

c1) Geben Sie die Grenzfrequenz f_g an.

$$2\pi RC = 1 \quad \Rightarrow \quad f_g = \frac{1}{2\pi RC} \qquad (9)$$

Die Tiefpass- und die Hochpass-Schaltung haben also die gleiche Grenzfrequenz.

c2) Geben Sie den Frequenzgang G und den Amplitudengang G für die „bezogene“ Frequenz f / f_g an.

Gl. (1) und Gl. (8) liefern den Frequenzgang:

$$\underline{G}(j\, f\ /\ f_g) = \frac{\underline{U}_a}{\underline{U}_e} = \frac{j\, f\ /\ f_g}{1 + j\, f\ /\ f_g} \tag{10}$$

Gl. (5) und Gl. (8) liefern den Amplitudengang

$$G(f\ /\ f_g) = \frac{U_a}{U_e} = \frac{f\ /\ f_g}{\sqrt{1 + \left(f\ /\ f_g \right)^2}} \tag{11}$$

Gl. (10) enthält die Fälle:

$$G(f = 0 Hz) = 0 \tag{12}$$

$$G(f\ /\ f_g << 1) \approx f\ /\ f_g \tag{13}$$

$$G(f = f_g) = 1 / \sqrt{2} = 0{,}707 \text{ gleicher Wert wie beim Tiefpass} \tag{14}$$

$$G(f >> f_g) = 1 \tag{15}$$

d) Phasengang

Ermitteln Sie den Phasengang φ(f / f_g).

Gl. (3) und Gl. (4) liefern:

$$\varphi(f\ /\ f_g) = arctan \frac{Im\{\underline{G}(jf)\}}{Re\{\underline{G}(jf)\}} = arctan \frac{1}{2\pi fRC} = arctan \frac{1}{f\ /\ f_g} \tag{16}$$

Markante Werte bzw. Bereiche der Phasenverschiebung sind:

$$\varphi(f = 0 Hz) = + arctan \infty = + \frac{\pi}{2} = +90^o \tag{17}$$

$$\varphi(f = f_g) = + arctan 1 = + \frac{\pi}{4} = +45^o \tag{18}$$

$$\varphi(f >> f_g) \approx + arctan 0 = 0 = 0^o \tag{19}$$

e) Zahlenbeispiel

Für zwei Sensoren sind die Ersatzschaltungen nach Bild 1 mit den Komponenten R_1 und C_1 bzw. R_2 und C_2 gegeben. Die entsprechenden Frequenzgänge sind $\underline{G}_1(jf)$ und $\underline{G}_2(jf)$.

$R_1 = 0{,}16\ \mathrm{M\Omega}$ $\quad C_1 = 1\ \mu\mathrm{F}$

$R_2 = 0{,}16\ \mathrm{M\Omega}$ $\quad C_2 = 200\ \mathrm{nF}$

e1) Welchen Wert haben die Grenzfrequenzen f_{g1} und f_{g2} in Hz?

Gl. (8) liefert:

$$f_{g1} = \frac{1}{2\pi \cdot 0{,}16 \cdot 10^{6}\,\Omega \cdot 1 \cdot 10^{-6}\,F} = 1Hz \tag{20}$$

$$f_{g2} = \frac{1}{2\pi \cdot 0{,}16 \cdot 10^{6}\,\Omega \cdot 200 \cdot 10^{-9}\,F} = 5Hz \tag{21}$$

e2) Welchen Wert haben die Amplitudengänge bei f = 0 Hz?

Gl. (5) oder Gl. (11) liefert:

$$\left|\underline{G}_1(f = 0Hz)\right| = 0 \tag{22}$$

$$\left|\underline{G}_2(f = 0Hz)\right| = 0 \tag{23}$$

e3) Welchen Wert haben die Amplitudengänge bei $f = 10\ f_g$ und $f = 100\ f_g$

Aus Gl. (14):

$$G_1(f = 10 f_g) \approx 1 \qquad G_1(f = 100 f_g) \approx 1 \tag{24}$$

$$G_2(f = 10 f_g) \approx 1 \qquad G_2(f = 100 f_g) \approx 1 \tag{25}$$

e4) Zeichnen Sie die Amplitudengänge beider Sensoren für den Frequenzbereich 0,1 f_g bis 10 f_g in einem doppelt logarithmischen Diagramm (Bild 2).

Tragen Sie dazu als Asymptoten für $f << f_g$ die Gerade Gl. (12) und für $f >> f_g$ die Gerade Gl. (14) ein.

Der gesuchte Amplitudengang ergibt sich als Ausgleichkurve an die beiden Asymptoten durch den Punkt $G(f = f_g) = 1/\sqrt{2} = 0{,}707$ gemäß Gl. (13).

e5) Zeichnen Sie den Phasengang $\varphi_1(f)$ und $\varphi_2(f)$ für die beiden Schaltungen in Bild 3.

Bekannt sind folgende Punkte:

$$\varphi(f = 0 Hz) = +90^o$$

$$\varphi(f = f_g) = +\pi / 4 = +45^o$$

$$\varphi(f = 100 f_g) = + arctan(1 / 100) \approx +0 = +0^o$$

Die Kurve des Phasenganges hat bei der Grenzfrequenz $f = f_g$ einen Wendepunkt.

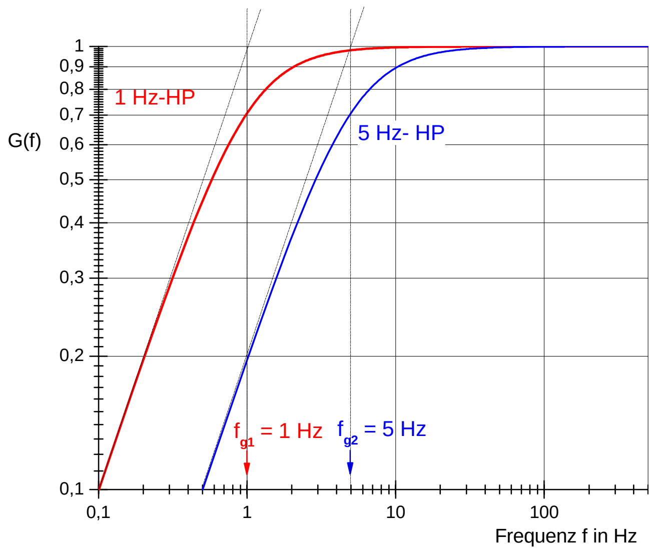

Bild 2

Amplitudengang G(f)

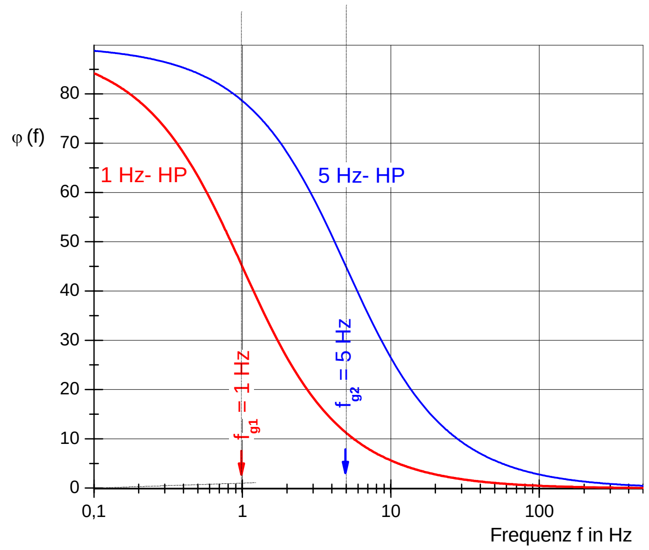

Bild 3

Phasengang φ (f)