1.2.3 Zeitverhalten eines Hochpass-Messgliedes

Sachworte: Hochpass-Messglied, RC-Hochpass, Differentialgleichung, Zeitverhalten, Sprungantwort, Übergangsfunktion

Im Buch ist das Zeitverhalten der RC-Tiefpass-Schaltung erläutert. In dieser Aufgabe sollen die dort gebrachten Überlegungen auf ein RC-Hochpass-Messglied angewendet werden.

Gegeben ist die Schaltung von Bild 1, wie sie auch in Aufgabe 1.2.2 zu finden ist, mit der Eingangsspannung $u_e(t)$ und der Ausgangsspannung $u_a(t)$.

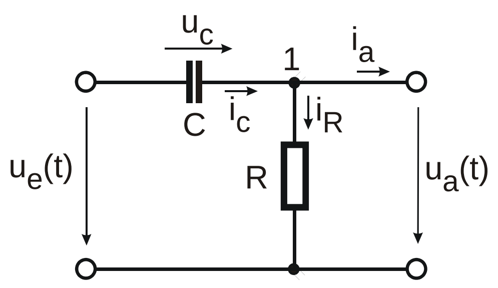

Bild 1

a) Ermitteln Sie die Differentialgleichung für $u_a(t)$ als Funktion von $u_e(t)$, wenn $u_a(t)$ nicht belastet wird.

Mit $i_a = 0$ A lautet die Gleichung für die Ströme in Knoten 1:

$$i_C = i_R \tag{1}$$

Die Maschengleichung liefert:

$$u_e = u_C + u_a \tag{2}$$

$$\text{Mit} \quad u_c = \frac{1}{C}\int i_C \, dt = \frac{1}{C}\int i_R \, dt \tag{3}$$

$$\text{und} \quad i_R = \frac{u_a}{R} \tag{4}$$

entsteht aus Gl. (2)

$$u_e = \frac{1}{C}\int \frac{u_a}{R} dt + u_a = \frac{1}{RC}\int u_a \, dt + u_a \, . \tag{5}$$

Durch Differenzieren und Umstellen von Gl. (5) ergibt sich die Differentialgleichung zu:

$$u_a + RC\,\dot{u}_a = RC\,\dot{u}_e \tag{6}$$

und mit der Zeitkonstanten τ zu:

$$u_a + \tau\,\dot{u}_a = \tau\,\dot{u}_e \quad \text{mit } \tau = RC \tag{7}$$

b) Bestimmen Sie die Sprungantwort des Hochpass-Messgliedes. Lösen Sie dazu die DGL für den Fall, dass sich die Eingangsspannung u_e zur Zeit t = 0 s sprungförmig von u_e (t = 0 s) = 0 V auf u_e(t > 0 s) = U_0 ändert.

Die Lösung der linearen DGL Gl. (6) oder Gl. (7) besteht aus der Lösung $u_{a\ hom}$ der homogenen DGL und einer speziellen (partikulären) Lösung $u_{a\ part}$ und erfolgt in 3 Schritten.

Schritt 1:

Für die Lösung u_{hom} der homogenen DGL wird in Gl. (6) oder Gl. (7) die rechte Seite der Gleichung, die die sog. „Stör- oder Anregungsfunktion“, zu Null gesetzt.

$$u_a + \tau \dot{u}_a = 0 \tag{8}$$

Mit einem für eine Sprungerregung typischen exponentiellen Ansatz, wie er z.B. aus der mathematischen Grundlagenvorlesung bekannt ist,

$$u_{a\ hom}(t) = K\ e^{-\lambda t} \qquad K : Konstante \tag{9}$$

ergibt sich durch Einsetzen in Gl. (8)

$$\lambda = 1/\tau \tag{10}$$

die Gl. (9)in der Form

$$u_{a\ hom}(t) = K\ e^{-t/\tau} \qquad K : Konstante;\ \tau = RC \tag{11}$$

Schritt 2:

Die spezielle Lösung $u_{a\ part}$ wird aus einem speziellen Systemzustand, z.B. dem eingeschwungenen Zustand zur Zeit $t \to \infty$, gewonnen. Der Kondensator C in Bild 1 wird sich dann völlig aufgeladen haben, resultierend mit einem Strom i_R = 0 A durch den Widerstand R und somit einem U_a = 0 V.

$$u_{a\ part}(t) = u_a(t \to \infty) = 0\,V \tag{12}$$

Schritt 3:

Die Integrationskonstante K berechnet sich aus der gegebenen Anfangsbedingung. Der Kondensator C (Bild 1) beginnt sich zur Zeit t = 0 s erst aufzuladen, sodass die Kondensatorspannung $u_c(t=0s)$ = 0 V ist und nach Gl. (2) die volle Eingangsspannung $u_e(t=0s)=U_0$ als Ausgangsspannung $u_a(t)$ anliegt:

$$u_a(t=0) = Ke^{-0} = U_0 \quad \Rightarrow K = U_0 \tag{13}$$

woraus sich mit den Gl. (11) und (12) die gesuchte sog. „Sprungantwort“ ergibt.

$$u_{as}(t) = u_{a\,hom} + u_{a\ part} = U_0\ e^{-t/RC} = U_0\ e^{-t/\tau} \tag{14}$$

c) Wie lautet die Übergangsfunktion h(t)?

Die Übergangsfunktion ist definiert als die Sprungantwort nach Gl. (6) bezogen auf die Höhe U_0 des Eingangssprunges und ist damit dimensionslos.

$$u_a(t) = \frac{u_{as}(t)}{U_0} = e^{-t/RC} = e^{-t/\tau} \qquad (15)$$

d) Skizzieren Sie die Sprungantworten u_{as}(t) für folgenden Fälle:

α)	U_0 = 1 V	R = 0,16 MΩ	C = 1 µF
β)	U_0 = 1 V	R = 0,16 MΩ	C = 200 nF
γ)	U_0 = 2 V	R = 0,16 MΩ	C = 1 µF
δ)	U_0 = 2 V	R = 0,16 MΩ	C = 200 nF

Die Sprungantwort u_{as} hat nach Gl. (11) den Verlauf:

$$u_{as}(t) = U_0\, e^{-t/RC} = U_0\, e^{-t/\tau}$$

Die Höhe des Spannungssprunges am Eingang beträgt U_0 = 1 V bzw. 2 V und so beginnen die Kurven zur Zeit t = 0 s unabhängig von der Zeitkonstanten τ bei 1 V bzw. bei 2 V.

Lt. Angabe sind jeweils zwei unterschiedlich dimensionierte Hochpass-Schaltungen mit den Zeitkonstanten τ_1 bzw. τ_2 zu untersuchen:

$$\alpha),\ \gamma)\quad \tau_1 = 2\pi \cdot RC_1 = 2\pi \cdot 0{,}16\ M\Omega \cdot 1\ \mu F = 1\,s \quad\Rightarrow\quad \tau_1 = 1\,s$$

$$\beta),\ \delta)\quad \tau_2 = 2\pi \cdot RC_2 = 2\pi \cdot 0{,}16\ M\Omega \cdot 0{,}2\ \mu F = 0{,}2\,s \Rightarrow \quad \tau_2 = 0{,}2\,s$$

Die Konstruktion der Sprungantwort $u_{as}(t)$ wird in Bild 2 für einen Eingangssprung der Höhe U_0 bei einer Zeitkonstanten τ *gezeigt.*

*Durch die Punkte **P1** mit $u_{as}(t = 0\ s) = U_0$ und **P2** mit $u_{as}(t = \tau)$ wird eine Gerade gezeichnet. Die gesuchte $u_{as}(t)$-Kurve beginnt nun in P1, verläuft tangential an die durch P1 und P2 eingezeichnete Gerade und strebt asymptotisch gegen 0.*

Achten Sie beim Eintragen der beiden Punkte P1 und P2 auf die korrekten Koordinaten:

$$Punkt\ P1: P1(t = 0s\ ;\ u_a = U_0\ )$$
$$Punkt\ P2: P2(t = \tau\ ;\ u_a = 0V\ )$$

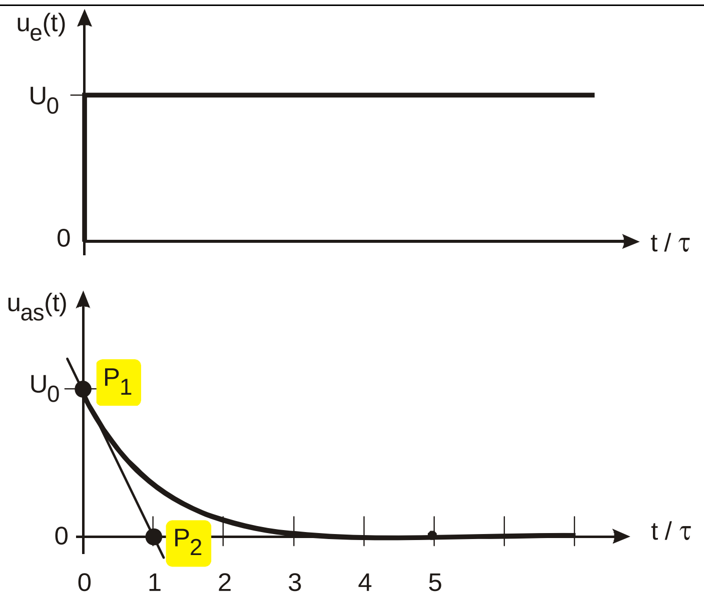

Bild 2 Konstruktion der Sprungantwort eines HP-Messgliedes

In Bild 3 sind alle Sprungantworten $u_{as}(t)$ für die geforderten 4 Fälle α), β), γ) und δ) eingetragen. Die Punkte P1 liegen auf der Ordinate jeweils bei U_0 =1 V bzw. 2 V unabhängig von der Zeitkonstanten τ_1 bzw. τ_2. Die Punkte P2 befinden sich auf der Abszisse bei τ_1 bzw. τ_2 unabhängig von der Sprunghöhe U_0.

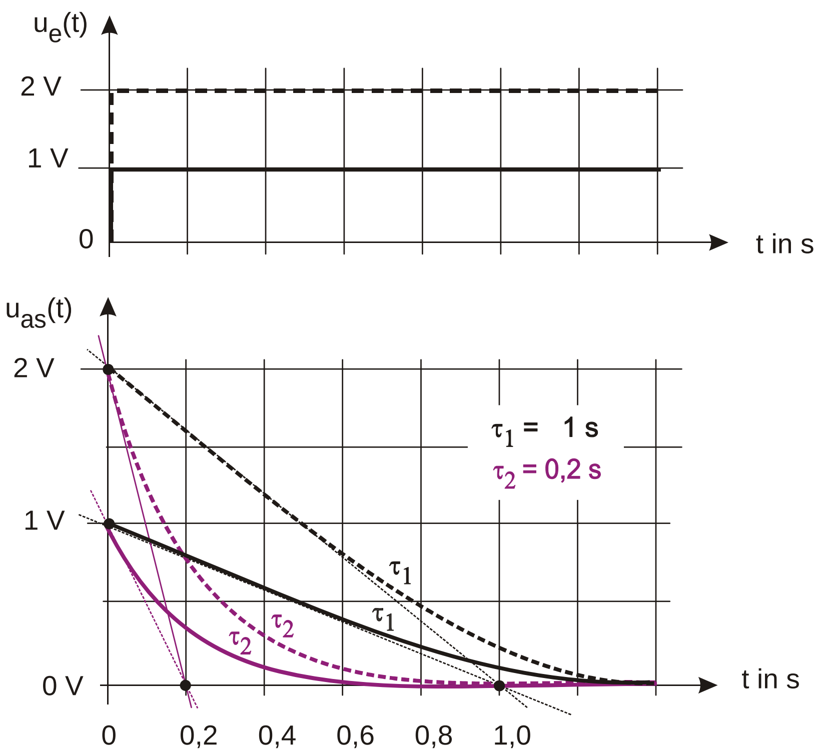

Bild 3 Sprungantworten eines Hochpass-Messgliedes