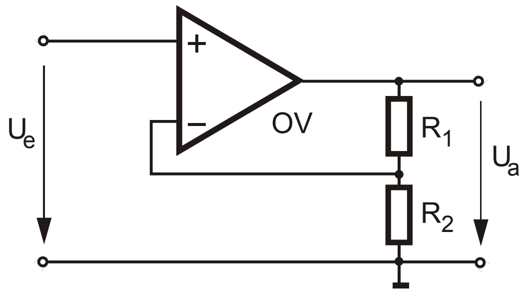
2.3.2 Messverstärker für Spannungen

Sachworte: Messverstärker, u/u-Verstärker, Spannungsfolger, Impedanzwandler, Superposition, Nullpunktfehler, Offsetspannung, Offsetstrom, Eingangsstrom, Messfehler (bekannte, systematische), Messabweichung (synonym zu „Messfehler“), Messunsicherheiten (unbekannte Einflüsse)

Bild 1 zeigt einen u/u-Spannungsverstärker, dessen Verstärkung k durch die Ohmschen Widerstände R_1 und R_2 bestimmt wird.

In der Aufgabe werden zunächst systematische Fehler (Messabweichungen) betrachtet, die durch Abweichungen der Widerstandswerte verursacht sind. Weiterhin interessieren die Auswirkungen statistisch verteilter Toleranzen der Widerstandswerte, wobei dann mit Hilfe der berechnenden Statistik sog. Messunsicherheiten zu berechnen sind. Abschließend werden die Einflüsse der Offsetspannung und der Eingangsströme des Operationsverstärkers OV untersucht.

Soweit nicht anders angegeben wird der OV als ideal betrachtet mit einer unendlich großen offenen Spannungsverstärkung $k' \to \infty$ und einem unendlich hohen Eingangswiderstand $R_e' \to \infty$.



R_1 = 99kΩ
R_2 = 1kΩ

Bild 1

Die Verstärkung $k = U_a/U_e$ wurde im Buch in Kapitel 2.3 Gl. (2.133) berechnet:

$$k = \frac{U_a}{U_e} = 1 + \frac{R_1}{R_2} \tag{1}$$

Für eine Verstärkung k = 100 wurden die Widerstände zu R_1 = 99 kΩ und R_2 = 1 kΩ dimensioniert (Sollwerte).

a) Systematischer Fehler (Messabweichung)

Die beiden Widerstände R_1 und R_2 wurden vermessen mit dem Ergebnis, dass R_1 um $\Delta R_1 = 4\ k\Omega$ zu groß und R_2 um $\Delta R_2 = -\ 0{,}03\ k\Omega$ zu klein war.

Wie groß ist die tatsächliche Verstärkung $k_{real} = U_a / U_e$ allgemein und zahlenmäßig bei genauer numerischer Berechnung auf 2 Nachkommastellen?

Die tatsächlichen Widerstandswerte werden in die Gl. (1) eingesetzt.

$$k_{real} = 1 + \frac{R_{1soll} + \Delta R_1}{R_{2soll} + \Delta R_2} = 1 + \frac{103\ k\Omega}{0{,}97\ k\Omega} = 107{,}19 \qquad (2)$$

Damit weicht die reale Verstärkung k_{real} um Δk vom wahren Wert k ab Die Verstärkung ist um 7,19 bzw. 7,19 % zu groß.

$$\Delta k = k_{real} - k = 107{,}19 - 100 = +7{,}19$$
$$\frac{\Delta k}{k} = \frac{7{,}19}{100} = 0{,}0719 = 7{,}19\ \% \qquad (3)$$

b) Näherungsweise Berechnung des Fehler (Messabweichungen)

Der relative Fehler soll nun nochmals berechnet werden und zwar näherungsweise mit Hilfe einer Taylor-Reihenentwicklung, bei der nach dem 1. Glied abgebrochen wird.

Im Buch Gl. in (1.34) wird für ein Messergebnis der Form $y = f(x_1, x_2, .. x_n)$ der absolute Fehler Δy für kleine Werte $\Delta x_i / x_i << 1$ angegeben.

$$\Delta y = \sum \left(\frac{df}{dx_i} \frac{\Delta x_i}{x_i} \right) \qquad (4)$$

Damit ergibt sich für y = k der absolute Fehler Δk in allgemeiner Form zu

$$\Delta k = \frac{dk}{dR_1} \Delta R_1 + \frac{dk}{dR2} \Delta R_2 = \frac{\Delta R_1}{R_2} - \frac{R_1}{R_2} \frac{\Delta R_2}{R_2} \qquad (5)$$

und mit den gegebenen Zahlenwerten zu

$$\Delta k = \frac{4\ k\Omega}{1\ k\Omega} - \cdot \frac{99\ k\Omega}{1\ k\Omega} \frac{(-0{,}03\ k\Omega)}{1\ k\Omega} = +\ 6{,}97 \qquad (6)$$

und damit ein relativer Fehler von:

$$\frac{\Delta k}{k} = \frac{6{,}97}{100} = +\ 0{,}0697 = +\ 6{,}97\ \% \qquad (7)$$

Dieses zahlenmäßige Ergebnis (7) der Näherungsrechnung weicht zwar geringfügig vom exakten Zahlenwert nach Gl. (3) ab, was aber in der Praxis völlig unerheblich ist.

c) Messunsicherheiten

Die Werte der Widerstände R_1 und R_2 sind jetzt nicht mehr mit systematischen Fehlern (Abweichungen) behaftet sondern unterliegen Normalverteilungen (Gaußverteilungen) mit den Mittelwerten von $\overline{R}_1 = 99\,k\Omega$ bzw. $\overline{R}_2 = 1\,k\Omega$ Die ΔR_i sind jetzt die Standardabweichungen $s_1(R_1)$ und $s_2\,(R_2)$ dieser Verteilungen, die in der Elektrotechnik als Bauteiltoleranzen angegeben werden.

$$\overline{R_1} = 99\ k\Omega \qquad s_1 = 4\ k\Omega$$
$$\overline{R_2} = 1\ k\Omega \qquad s_2 = 0{,}03\ k\Omega$$

68,3 % der Widerstandswerte liegen im Intervall ± s um den jeweiligen Mittelwert.

$$95\ k\Omega \le R_1 \le 103\ k\Omega$$
$$0{,}97\ k\Omega \le R_2 \le 1{,}03\ k\Omega$$

Wie groß ist bei zufällig herausgegriffenen Widerständen R_1 und R_2 die 68,3 % - Messunsicherheit u der Verstärkung k?

Wird die Gl. (1.71) des Buches

$$u = s(\overline{y}) = \sqrt{\sum \left(\frac{df}{dx_i} \right)^2 s^2} \tag{8}$$

auf die Verstärkung $k = 1 + R_1 / R_2$ *angewendet, ergibt sich die Messunsicherheit u zu:*

$$u = s(\overline{k}) = \sqrt{\left(\frac{dk}{dR_1} \right)^2 s^2\left(R_1\right) + \left(\frac{dk}{dR_2} \right)^2 s^2\left(R_2\right)} = \sqrt{\left(\frac{1}{R_2} \right)^2 s_1^{\,2} + \left(-\frac{R_1}{R_2^{\,2}} \right)^2 s_2^{\,2}} \tag{9}$$

Bei umfangreicheren Berechnungen empfiehlt sich zwischendurch ein „Einheiten-Check“, bei dem geprüft wird, ob eine Gleichung hinsichtlich der Einheiten stimmig ist.

Offensichtlich ist Gl. (9) in dieser Hinsicht korrekt, nachdem R_1 und R_2 in Ω und ebenso s_1 und s_2 in Ω einzusetzen sind, sodass sich die Unsicherheit u als eine reine Zahl ohne Einheit ergibt.

Mit den gegebenen Zahlenwerten liefert Gl. (8):

$$u = s(\overline{k}) = \sqrt{\left(\frac{1}{1\ k\Omega} \right)^2 \left(4\ k\Omega\right)^2 + \left(\frac{99\ k\Omega}{1\ k\Omega^2} \right)^2 \left(0{,}03\ k\Omega\right)^2} = \sqrt{16{,}00 + 8{,}82} \approx 5 \tag{10}$$

Die absolute Unsicherheit des Verstärkungsfaktors k beträgt also 5 bei einem Mittelwert (Sollwert) von k = 100, der gleich dem Sollwert ist.

68,3 % der Werte der Verstärkungsfaktoren k liegen im Bereich $s(\overline{k}) = k \pm u = 100 \pm 5$:

$$95 \quad \le \quad k \quad \le \quad 105$$

d) Spannungsfolger

d1) Was versteht man unter einem Spannungsfolger und wo sind dessen Einsatzgebiete?

Man versteht unter einem Spannungsfolger einen u/u-Spannungs-Verstärker mit einer Verstärkung von 1, der wie alle u/u-Verstärker einen hohen Eingangswiderstand und einen niedrigen Ausgangswiderstand besitzt. Nachdem bei diesem Verstärker die Ausgangsspannung der Eingangsspannung „folgt“ und der hohen Eingangswiderstand in einen niedrigen Ausgangswiderstand „gewandelt“ wird, bezeichnet man einen solchen Verstärker als „Spannungsfolger“ oder als „Impedanzwandler“. Einsatzgebiete sind dort, wo die Signale hochohmiger Spannungsquellen ohne eine zusätzlich erforderliche Verstärkung einer nachfolgenden niederohmigen Auswerteeinheit zuzuführen sind.

d2) Wie sind bei einem Spannungsfolger R_1 und R_2 zu dimensionieren?

Gl. (1) liefert für

$$k = 1 + \frac{R_1}{R_2} = 1 \tag{11}$$

die Dimensionierungsvorschrift

$$k = 1 + \frac{R_1}{R_2} = 1 \quad \Rightarrow \frac{R_1}{R_2} = 0 \ , \tag{12}$$

die erfüllt wird durch:

$$R_1 = 0\ \Omega \quad \text{und } R_2 \text{ beliebig} \tag{13}$$

In der Praxis wird R_1 durch einen Kurzschluss realisiert, während R_2 nicht vorhanden ist und so eingespart werden kann (Bild 2).

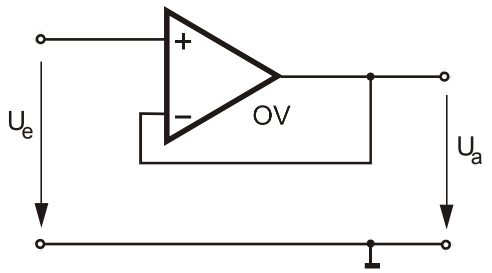


Bild 2

e) Einfluss von Spannungs- und Stromnullpunktfehlern

Der Operationsverstärker habe nun entsprechend Bild 3 einen Spannungsnullpunktfehler U_{os}, auch als „Offsetspannung“ bezeichnet, sowie Stromnullpunktfehler, repräsentiert durch die Eingangsströme I_n und I_p.
Ansonsten werden die Eigenschaften des idealen OV zu Grunde gelegt.
($k' \to \infty$ entsprechend $U_e' = 0$ mV und $R_e' \to \infty$ entsprechend $I_e' = 0$ mA)

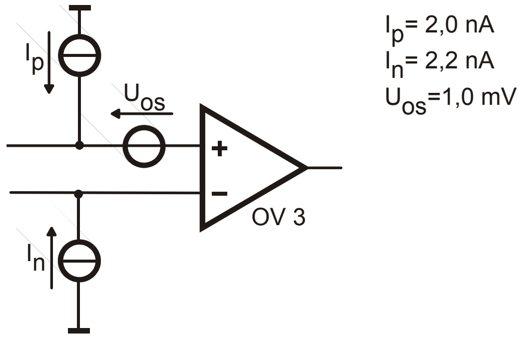


Bild 3

Geben Sie den durch U_{os}, I_n und I_p verursachten Nullpunktfehler ΔU_a der Ausgangsspannung U_a an, wenn die U_e-Spannungsquelle den Innenwiderstand R_i aufweist.

Die Lösung erfolgt am einfachsten nach dem Superpositionsprinzip. Bei $U_e = 0$ mV wird nacheinander jede der 3 vorhandenen Quellen U_{os}, I_n und I_p einzeln betrachtet und ihr Beitrag zur Ausgangsspannung U_a ermittelt. Die Addition („Superposition“) dieser 3 Einzelbeiträge ergibt den gesuchten Nullpunktfehler. Bei diesem Superpostitionsverfahren wird eine nicht betrachtete Spannungsquelle als Kurzschluss und eine nicht betrachtete Stromquelle als Unterbrechung angesetzt, wie in Bild 4 bis 6 dargestellt.

$\Delta U_a(U_{os})$ bei $I_n = 0$ mA und $I_p = 0$ mA:

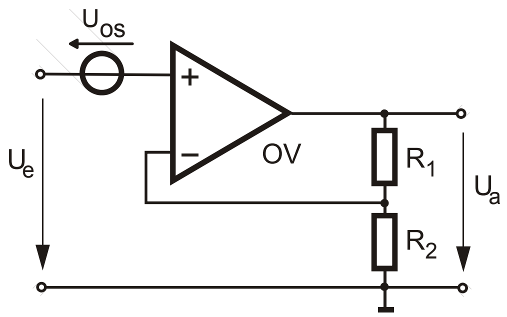


Bild 4

Entsprechend Bild 4 wirkt U_{os} wie eine zusätzliche Eingangsspannung, für die Gl. (1) anzuwenden ist und die bei $U_e = 0$ mV die Ausgangsspannung $\Delta U_a(U_{os})$ liefert.

$$\Delta U_a(U_{os}) = k \cdot U_{os} = \left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right) \cdot U_{os} \qquad (14)$$

$\Delta U_a(I_n)$ bei U_{os} = 0 mV und I_p = 0 mA:

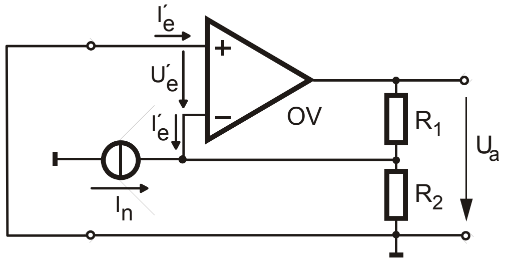


Bild 5

Die Berechnung bedarf einiger Überlegungen an Hand von Bild 5. Wegen U_e = 0 mV ist der Verstärkereingang kurzgeschlossen. Wegen $U_e´$= 0 mV ist der Spannungsabfall über R_2 Null (Maschengleichung!). Damit fließt wegen $I_e´$= 0 mA (Knotenregel) der gesamte Strom I_n über den Widerstand R_1. Die durch I_n hervorgerufene Ausgangsspannung ist damit gleich dem Spannungsabfall über R_1 und beträgt:

$$\Delta U_a(I_n) = -R_1 I_n \tag{15}$$

$\Delta U_a(I_p)$ bei U_{os} = 0 mV und I_n = 0 mA:

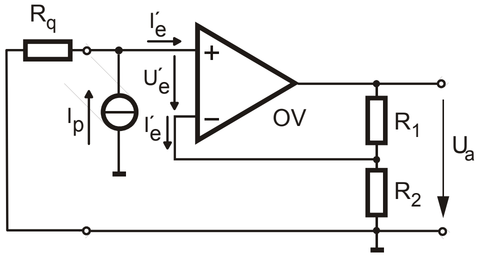


Bild 6

Hier ist der Innenwiderstand R_q der Eingangsquelle U_e zu berücksichtigen (Bild 6). Wegen $I_e´$= 0 fließt der Strom I_p über R_q und führt dort zu einem Spannungsabfall von I_pR_q, der als eine zusätzliche Eingangsspannung wirkt. Gl. (1) ergibt den durch I_p verursachte Ausgangsspannung zu:

$$\Delta U_a(I_p) = R_q k \cdot I_p \tag{16}$$

Gesamter Nullpunktfehler $\Delta U_a(U_{os}, I_n, I_p)$:

Die Superposition, d.h. die Addition der Gleichungen (14), (15) und (16), liefert:

$$\begin{aligned}\Delta U_a(U_{os}, I_n, I_p) &= \Delta U_a(U_{os}) + \Delta U_a(I_n) + \Delta U_a(I_p) \\ &= k\left(U_{os} + R_q I_p\right) - R_1 I_n\end{aligned} \tag{17}$$

Anmerkung

In den Datenblättern von Operationsverstärkern finden Sie standardmäßig die folgenden Angaben zu den Nullpunktfehlern des OV:

- Offsetspannung U_{os}
- Offsetstrom I_{os} $\quad I_{os} = \left| I_n - I_p \right|$
- Biasstrom I_{bias} $\quad I_{bias} = \left| \frac{I_n + I_p}{2} \right|$

Die beiden Eingangsströme I_n und I_p des OV sind nicht explizit gegeben, sondern nur betragsmäßig als Unsymmetrie („Offsetstrom“) I_{os} und als Mittelwert („Biasstrom“) I_{bias}.

Nachdem I_n und I_p stets beide das gleiche entweder positive oder negative Vorzeichen besitzen, berechnen sich die OV-Eingangsströme betragsmäßig zu:

$$\left| I_n \right| = \frac{I_{os}}{2} + I_{bias} \quad \text{und} \quad \left| I_p \right| = \frac{I_{os}}{2} - I_{bias} \tag{18}$$