2.3.4 Integrationsverstärker

Sachworte: Messverstärker, Integrationsverstärker, Frequenzgang, Übertragungsfunktion, Amplitudengang, RC-Tiefpass

Gegeben ist ein Messverstärker nach Bild 1, der mit einem idealen Operationsverstärker OV arbeitet.

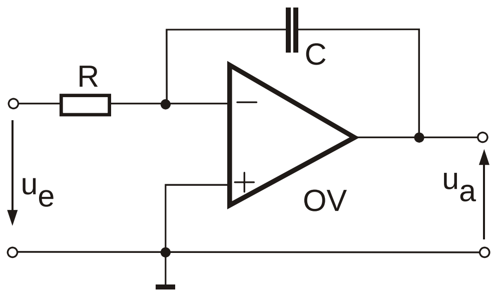

Bild 1

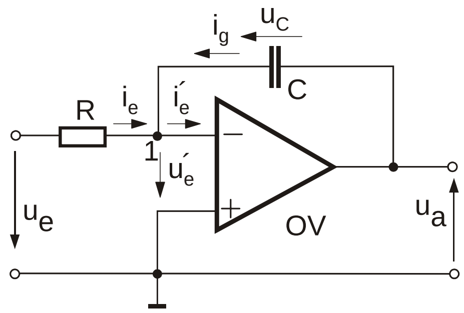

Bild 2

a) Nennen Sie messtechnische Anwendungsfälle für Integrationsverstärker.

- Sägezahngeneratoren in Analog-Oszilloskopen, Analog/Digital-Umsetzer, Zeitgeber

- Sägezahn-, Dreiecksgenerator zum Erzeugen von Testsignalen

- Ladungsverstärker bei Piezoaufnehmern (R = 0 Ω)

- allgemein Integration von Sensorsignalen, z.B. Beschleunigung ⇒ Weg

b) Wie lautet der Zusammenhang zwischen der Ausgangsspannung $u_a(t)$, der Eingangsspannung $u_e(t)$ und den Bauteilen des Integrators für $t \geq t_0$.

Es interessiert also die Ausgangsspannung für die Zeitspanne zwischen t_0 und t. Die Ausgangsspannung $u_a(t=t_0)$ zu Beginn der Integration wird mit U_0 bezeichnet.

In Bild 2 ist die Schaltung von Bild 1 um die die in der folgenden Rechnung benutzten Ströme und Spannungen ergänzt. Eingetragen sind Zählpfeile, die nicht notwendigerweise mit der physikalischen Richtung (Richtungspfeile) der betreffenden Ströme und Spannungen übereinstimmen müssen.

Bei einem idealen Operationsverstärker OV werden die Spannung u'_e zwischen den beiden Eingangsklemmen und der Eingangsstrom i'_e zu Null angenommen.

Damit lautet die Maschengleichung am Eingang des Verstärkers:

$$u_e = i_e R \qquad (1)$$

Die Gleichung für die Ströme an Knoten 1 liefert:

$$i_e + i_g = 0 \quad \Rightarrow \quad i_g = -i_e \qquad (2)$$

Mit der Maschengleichung über den Verstärkerausgang und den Kondensator C

$$u_a + u_c = 0 \quad \Rightarrow \quad u_a = -u_c \qquad (3)$$

und der Spannung u_c am Kondensator C

$$u_c = \int_{t_0}^{t} \frac{1}{C} i_g \, dt + U_0 \qquad (4)$$

ergibt sich die Ausgangsspannung $u_a(t)$, wobei $u_a(t=t_0)$ mit U_0 bezeichnet ist:

$$u_a(t) = \frac{1}{RC} \int_{t_0}^{t} u_e \; dt + U_0 \qquad (5)$$

c) Wie groß ist die Ausgangsspannung $u_a(t)$ bei folgenden Zahlenwerten?

R = 3 MΩ	t = 3 s	U_0 = 0 V
C = 1 µF	t_0 = 0 s	$u_e(t)$ = $U_=$ Gleichspannung

Mit Gl. (5)

$$u_a(t) = \frac{1}{RC} (t - t_0) \cdot U_= + U_0 \qquad (6)$$

und den gegebenen Zahlenwerten:

$$u_a(t) = \frac{1}{3 \cdot 10^6 \, \Omega \cdot 1 \cdot 10^{-6} \, F} \left(3 - 0\right) s \cdot U_= + 0V = U_= \qquad (7)$$

d) Gegeben sind die Spannungsverläufe $u_e(t)$ von Bild 3a und 3b.
Tragen Sie in diese Bilder die entsprechenden Zeitverläufe von $u_a(t)$ ein.

gegeben: t_0 = 0 s; $u_a(t = t_0) = U_0$ = 0 V; R = 1 MΩ; C = 1 µF.**Fehler! Es ist nicht möglich, durch die Bearbeitung von Feldfunktionen Objekte zu erstellen.**

Wenn eine positive Gleichspannung von $U_=$ =+5 V integriert wird, so steigt nach Gl. (6) die Ausgangsspannung $u_a(t)$ linear mit der Zeit an.

$$u_a(t) = \frac{1}{RC} U_= \, t = \frac{1}{1 \cdot 10^6 \, \Omega \cdot 1 \cdot 10^{-6} \, F} \cdot 5\,V = 5\,V \cdot t/s \qquad (8)$$

Bei einer Eingangsspannung von +5 V entsteht also nach 2 s eine Ausgangsspannung von 10 V. Liegt keine Eingangsspannung an, so hält der Integrierer diesen Wert. Ist die Eingangsspannung von +5 V wieder vorhanden, dann nimmt die Ausgangsspannung wieder linear zu mit 5 V/s. Eine negative Eingangsspannung führt zu einer Abnahme der Ausgangsspannung. Somit ergeben sich die Kurven von Bild 3. Analog verhält sich die Ausgangsspannung bei Eingangsspannungen von +10V bzw. -5 V.

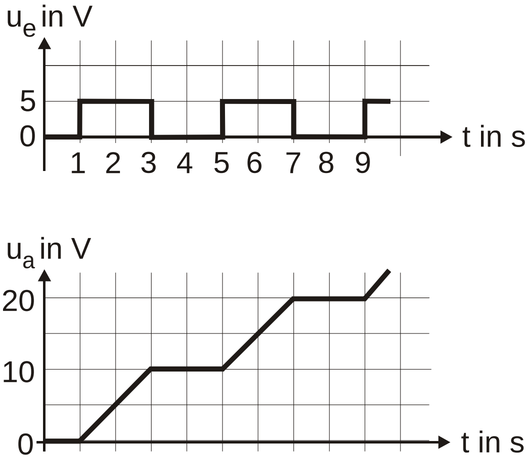

Bild 3a

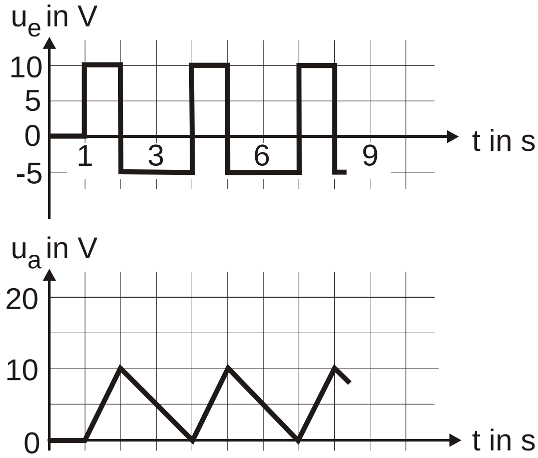

Bild 3b

e) Berechnen Sie die Übertragungsfunktion $\underline{G}(j\omega)$ und daraus den Amplitudengang $G(\omega) = |\underline{G}(j\omega)|$ des Integrierers.

Die Übertragungsfunktion, auch Frequenzgang genannt, und der Amplitudengang lassen sich durch Rechnung mit komplexen Widerständen ermitteln.

In dieser Übung sind alle komplexen Größen durch Unterstreichen gekennzeichnet.

Der im Buch in Kapitel 2.3.5 behandelte invertierende Verstärker wird zunächst in allgemeiner Form mit den beiden komplexen Bauelementen $\underline{Z}_1$ und $\underline{Z}_2$ betrachtet.

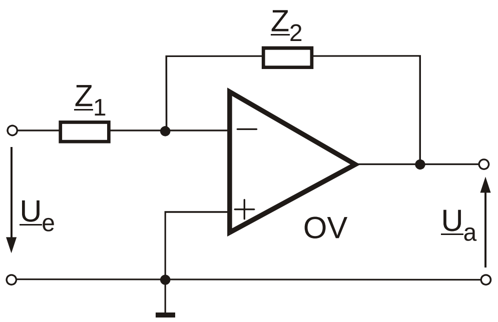

Bild 4

Analog zur Rechnung im Buch erhält man die komplexe Übersetzung $\underline{U}_a$ / $\underline{U}_e$, die gleich der Übertragungsfunktion $\underline{G}(j\omega)$ ist.

$$\underline{G}(j\omega) = \frac{\underline{U}_a}{\underline{U}_e} = \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1} \tag{9}$$

Beim Integrierer ist $\underline{Z}_1$ als Ohmscher Widerstand R und $\underline{Z}_2$ als Kondensator C realisiert.

$$\underline{Z}_1 = R \quad ; \quad \underline{Z}_2 = \frac{1}{j\omega C} \tag{10}$$

Mit Gl. (8) lautet dann die Übertragungsgfunktion G(jω) des Integrierers:

$$\underline{G}(j\omega)=\frac{\underline{U}_a}{\underline{U}_e}=\frac{1/j\omega C}{R}=\frac{1}{j\omega RC}=-j\frac{1}{\omega RC}\quad \text{oder}\quad \underline{G}(jf)=\frac{1}{j2\pi fRC} \qquad (11)$$

f) Lässt sich ein RC-Tiefpass zur Integration von Zeitsignalen verwenden?

f1) Vergleichen Sie dazu die Formeln für die Übertragungsfunktion $\underline{G}(jf/f_g)$ und den Amplitudengang G(f) des Integrierers mit den Ergebnissen von Aufgabe 1.2.1. In welchem Frequenzbereich zeigt demnach der RC-Tiefpass ein integrierendes Verhalten?

Integrierer

Um beide Schaltungen miteinander vergleichen zu können, wird nun beim Integrierer eine formale, technisch aber nicht relevante "Grenzfrequenz" $f_g = 2\pi RC$ analog zum Tiefpass (Übung 1.2.1) eingeführt,

$$\omega_g RC = 1 \quad\Rightarrow\quad \omega_g=\frac{1}{RC}\quad \text{bzw.}\quad f_g=\frac{\omega_g}{2\pi}=\frac{1}{2\pi RC} \qquad (12)$$

womit Gl. (11) übergeht in:

$$\underline{G}(jf/f_g)_{Int}=\frac{\underline{U}_a}{\underline{U}_e}=-j\frac{1}{\omega/\omega_g}=-j\frac{1}{f/f_g} \qquad (13)$$

Der Betrag der Übertragungsfunktion (=Frequenzgang) $\underline{G}(j\omega)$ ist der Amplitudengang G.

$$G=\left|\frac{\underline{U}_a}{\underline{U}_e}\right|=\left|\underline{G}(j\omega)\right|=\left|\underline{G}(jf)\right|=\sqrt{(\Re e)^2+(\Im m)^2}$$

$$G_{Int}=\sqrt{0+\frac{1}{(-f/f_g)^2}}=\frac{1}{f/f_g} \qquad (14)$$

Tiefpass

Für einen RC-Tiefpass wurde in Aufgabe 1.2.1 der Amplitudengang $G_{TP}(f)$ abgeleitet.

$$G_{TP}(f/f_g)=\frac{1}{\sqrt{1+(f/f_g)^2}} \qquad (15)$$

Im Bereich $f >> f_g$ ergibt sich die Näherung:

$$G_{TP}(f>>f_g)\approx\frac{1}{\sqrt{(f/f_g)^2}}=\frac{1}{f/f_g} \qquad (16)$$

	Integrierer	**Tiefpass**
$\underline{G}(j\, f\ /\ f_g\ )$	$\dfrac{1}{j\, f\ /\ f_g}$	$G_{TP}(\ f\ /\ f_g\ ) = \dfrac{1}{1 + j\, f\ /\ f_g}$
$G(\ f\ /\ f_g\ )$	$\dfrac{1}{f\ /\ f_g}$	$\dfrac{1}{\sqrt{1+\left(\ f\ /\ f_g\right)^2}}$
$G(\ f << f_g\ )$	$\dfrac{1}{f\ /\ f_g}$	≈ 1
$G(\ f = f_g\ )$	1	$1/\sqrt{2} = 0{,}707$
$G(\ f >> f_g\ )$	$\dfrac{1}{f\ /\ f_g}$	$\approx \dfrac{1}{f\ /\ f_g}$

Für hohe Frequenzen $f >> f_g$ sind die Frequenzgänge $\underline{G}$ und damit auch die Amplitudengänge G von Integrator und RC-Tiefpass gleich. Damit lässt sich in diesem Bereich mit einem aus nur aus 2 passiven Bauelementen R und C aufgebauten Tiefpass eine Integration durchführen.

f2) Tragen Sie G(f) für beide Schaltungen in das gemeinsame Diagramm von Bild 5 ein und markieren Sie den Integrationsbereich des Tiefpasses.

In Bild 5 ist der Amplitudengang des Tiefpasses aus Aufgabe 1.2.1 mit gleich dimensionierten Bauelementen (R = 0,16 MΩ und C = 1 µF entsprechend einer Grenzfrequenz von $f_g = 1/2\pi RC = 1$ Hz) eingezeichnet. Für Frequenzen f >> 1 Hz fallen die Kurven von Integrierer und Tiefpass zusammen, sodass der 1 Hz- TP ab etwa 3 Hz integrierend wirkt.

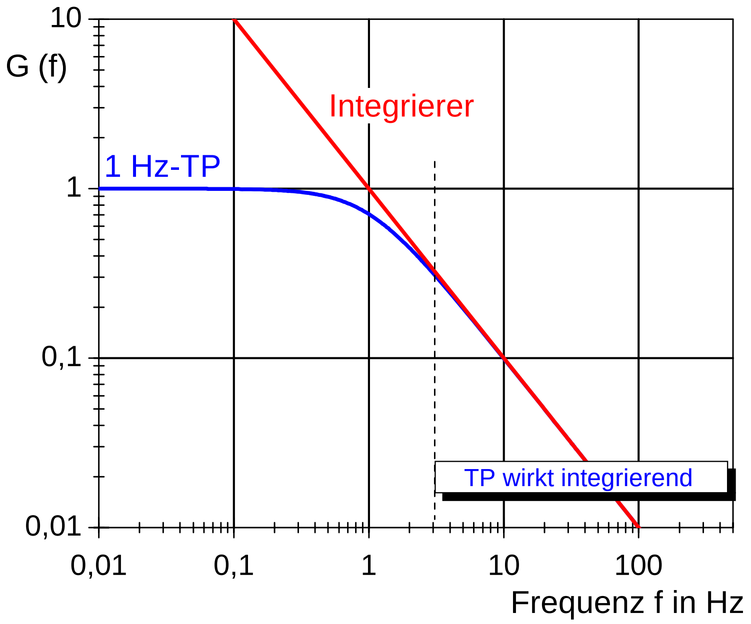

Bild 5

Amplitudengang vonIntegrations-verstärker und RC-Tiefpass