

## 2.4.4 Piezoelektrischer Kraftaufnehmer

Sachworte: Piezoelektrischer Kraftaufnehmer, Kraftmessung, Spannungsverstärker, Ladungsverstärker, Piezo-Einzelement, Piezo-Doppelement

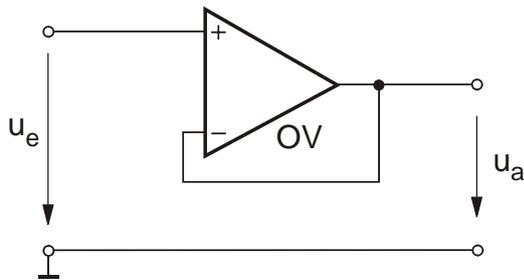


Bild 1 Spannungsverstärker

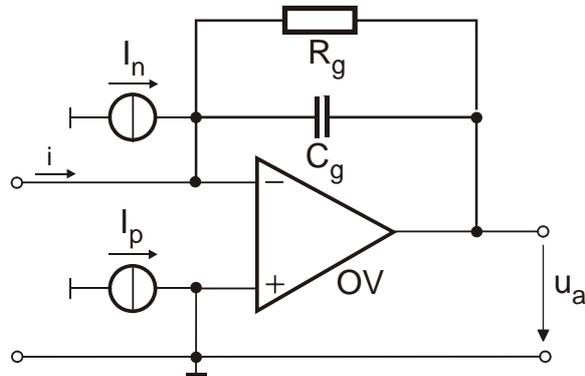


Bild 2 Ladungsverstärker

Eine dynamisch wirkende Kraft  $F$  wird mit einem piezoelektrischen Kraftaufnehmer, der aus einem Einzelement (Kapazität  $C_q$ , Innenwiderstand  $R_q$ , Piezomodul  $k$ ) aufgebaut ist, erfasst. Der Sensor wird über ein nicht ideales Koaxialkabel (Parallelerersatzkapazität  $C_k$ , Parallelersatzwiderstand  $R_k$ ) einmal an einen Spannungsverstärker nach Bild 1 und dann an einen Ladungsverstärker nach Bild 2 angeschlossen. Die Operationsverstärker OV werden ohne weitere Angaben als ideal angenommen ohne Nullpunktfehler, mit einer unendlichen Spannungsverstärkung  $k'$  und einem unendlich großen Eingangswiderstand  $R_e'$ . Nur beim Ladungsverstärker werden die Eingangsströme des OV berücksichtigt und dann wie in Bild 2 durch die beiden Stromquellen  $I_n$  und  $I_p$  dargestellt.

In der Aufgabe sollen typische Sensoreigenschaften gezeigt und die beiden Verstärkertypen auf ihre Eignung zur Messung statischer Kräfte untersucht werden.

Piezokraftaufnehmer:  $k = 2,3 \cdot 10^{-12} \text{ As/N}$ ;  $R_q = 10^{12} \Omega$ ;  $C_q = 10 \text{ pF}$ ;

Koaxialkabel:  $R_k = 20 \text{ M}\Omega$ ,  $C_k = 10 \text{ pF}$

Ladungsverstärker:  $R_g = 100 \text{ M}\Omega$ ;  $C_g = 1 \mu\text{F}$

Die Kraft  $F$  ändere sich zur Zeit  $t = 0 \text{ s}$  sprunghaft von  $F = 0 \text{ N}$  auf  $F = F_0 = 10^3 \text{ N}$ .

Operationsverstärker OV und Koaxialkabel seien zunächst ideal

( $I_n = I_p = 0$  mA;  $R_K \rightarrow \infty$  und  $C_K = 0$  pF)

a) Berechnen und skizzieren Sie die Ausgangsspannung  $u_q$  des Sensors ohne nachgeschalteten Verstärker.

Die Ausgangsspannung  $u_q$  des Sensors ergibt sich aus der beim Spannungssprung entstehenden Ladung  $Q_0$

$$Q_0 = k \cdot F_0 = 2,3 \cdot 10^{-12} \frac{\text{As}}{\text{N}} \cdot 10^3 \text{ N} = 2,3 \cdot 10^{-9} \text{ As} \quad (1)$$

und den gegebenen Kenngrößen  $C_q$  und  $R_q$  des Quarzes zu:

$$u_q(t_0) = U_0 = \frac{Q_0}{C_q} = \frac{kF_0}{C_q} = \frac{2,3 \cdot 10^{-9} \text{ As}}{10 \cdot 10^{-12} \text{ As/V}} = 230 \text{ V} \quad (2)$$

Die Spannung  $u_q(t)$  nimmt wegen des Entladestromes über  $R_q$  mit der Zeitkonstanten  $\tau$  ab.

$$\tau_q = R_q C_q = 10^{12} \Omega \cdot 10 \text{ pF} = 10^{12} \frac{\text{V}}{\text{A}} \cdot 10^{-11} \frac{\text{As}}{\text{V}} = 10 \text{ s} \quad (3)$$

$$u_q = U_0 e^{-t/\tau} = U_0 e^{-t/R_q C_q} = 230 \text{ V} e^{-t/10 \text{ s}} \quad (4)$$

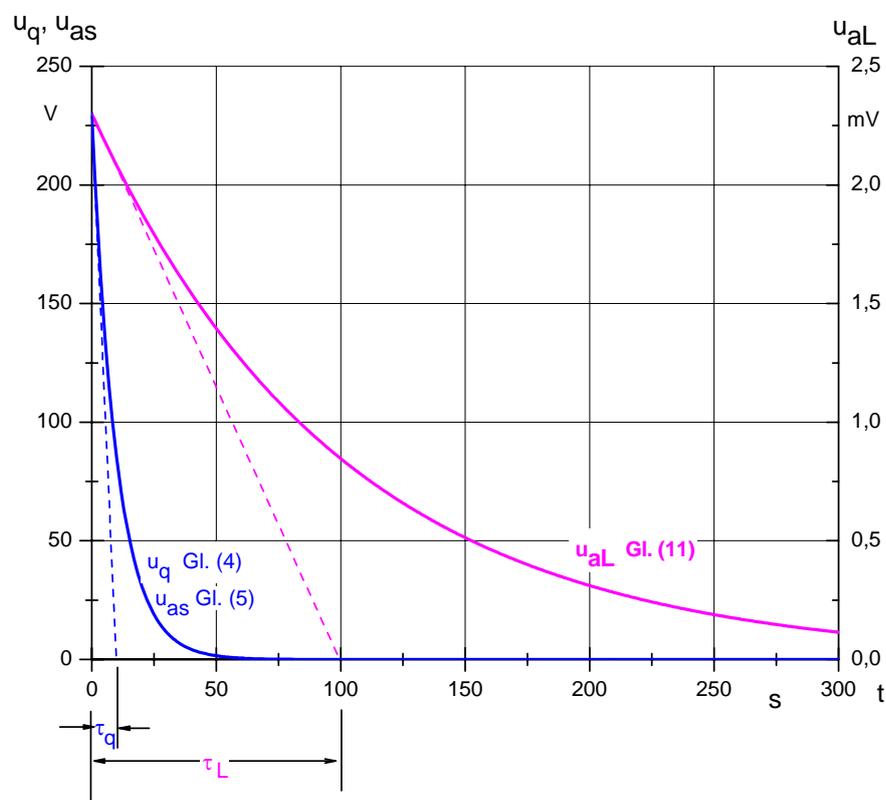


Bild 3

**b) Diskutieren Sie die Eigenschaften der beiden Verstärker zur Verstärkung des Sensorsignals. Welche Funktion hat der Widerstand  $R_g$  in Bild 2?**

Der Spannungsverstärker misst zwar hochohmig, kann aber die Entladung des Sensors infolge des Sensorinnenwiderstandes  $R_q$  nicht verhindern. Dieser Verstärkertyp ist nur für dynamische Messungen geeignet.

Der Ladungsverstärker speichert die durch die Kraft entstandene Sensorladung  $Q_0$  auf dem Kondensator  $C_g$ . Dadurch können auch sich langsam verändernde (quasistatische) Kräfte gemessen werden.

Der Widerstand  $R_g$  in der Gegenkopplung des Ladungsverstärkers unterbindet das Aufladen des Kondensator  $C_g$  durch den Eingangsstrom  $I_n$  des Operationsverstärkers und somit eine Drift der Verstärkerausgangsspannung. Allerdings wird durch die so entstehende Zeitkonstante  $R_g C_g$  ebenso wie beim Spannungsverstärker das Messen statischer Kräfte verhindert.

**c) Berechnen und skizzieren Sie für beide Messverstärker den Verlauf ihrer Ausgangsspannung  $u_a(t)$ .**

*c1) Spannungsverstärker*

Der ideale Spannungsverstärker (Bild 1) liefert bei einer Verstärkung von 1 an seinem Ausgang direkt die Sensorspannung nach Gl. (4).

$$u_{as}(t) = u_q(t) = 230 \text{ V } e^{-t/10s} \text{ V} \quad (5)$$

*c2) Ladungsverstärker*

Bild 4 stellt das um die Spannungen und Ströme ergänzte Bild 2 dar.

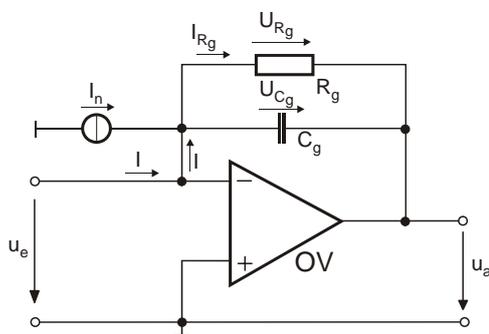


Bild 4

Durch Verwenden der bekannten Beziehungen

$$\text{Knotenregel : } i_{R_g} + u_{C_g} + i = 0$$

$$\text{Maschenregel : } u_a = u_{C_g} = u_{R_g}$$

$$\text{ohmsches Gesetz : } u_{R_g} = R_g i_{R_g} \quad (6)$$

$$\text{Strom } i \text{ und Ladung } Q : i = dQ / dt$$

$$\text{Piezosensor : durch Kraft } F \text{ erzeugte Ladung } Q : Q = kF$$

ergibt sich folgende aus der Vorlesung bekannte lineare Differentialgleichung DGL:

$$u_a + R_g C_g \frac{du_a}{dt} = -R_g k \frac{dF}{dt} \quad (7)$$

Für einen Kraftsprung zur Zeit  $t = 0$  s von  $F = 0$  N  $\rightarrow F_0$  ergibt sich analog zum Spannungsverstärker eine exponentiell abklingende Ausgangsspannung des Ladungsverstärkers:

$$U_{aL} = U_{L0} e^{-t/\tau_L} \quad (8)$$

Gegenüber dem Spannungsverstärker ist die zur Zeit  $t = t_0 = 0$  s am Ausgang des Ladungsverstärkers anstehende Spannung  $u_{aL}(t_0)$  wesentlich geringer.

$$u_{aL}(t = t_0 = 0 \text{ s}) = U_{L0} = \frac{Q_0}{C_g} = \frac{kF_0}{C_g} = \frac{kF_0}{C_q} \frac{C_q}{C_g} = 230 \text{ V} \frac{10 \text{ pF}}{1 \mu\text{F}} = 2,3 \text{ mV} \quad (9)$$

Für die Zeitkonstante sind jetzt die Bauteile  $R_g$  und  $C_g$  in der Gegenkopplung maßgebend. Mit den gegebenen Werten  $R_g = 100 \text{ M}\Omega$  und  $C_g = 1 \mu\text{F}$  ergibt sich die Zeitkonstante  $\tau_L$  des Ladungsverstärkers zu:

$$\tau_L = R_g C_g = 100 \text{ M}\Omega \cdot 1 \mu\text{F} = 10^8 \frac{\text{V}}{\text{A}} \cdot 10^{-6} \frac{\text{As}}{\text{V}} = 100 \text{ s} \quad (10)$$

Durch Einsetzen der beiden Gl. (9) und Gl. (10) in Gl. (8) lautet der gesuchte Verlauf der LV-Ausgangsspannung  $u_{aL}(t)$ :

$$u_{aL}(t) = U_{L0} e^{-t/\tau_L} = U_{L0} e^{-t/R_g C_g} = 2,3 e^{-t/100 \text{ s}} \text{ mV} \quad (11)$$

### c3) Spannungsverläufe bei Spannungsverstärker und Ladungsverstärker

Die zeitlichen Verläufe der Ausgangsspannungen sind in Bild 3 eingetragen,  $u_{as}(t)$  nach Gl. (5) für den Spannungsverstärker sowie  $u_{aL}(t)$  nach Gl. (11) für den Ladungsverstärker.

**d) Wie wirkt sich bei beiden Verstärkern ein Koaxialkabel, das sich ersatzweise durch einen Parallelwiderstand  $R_K$  und eine Parallelkapazität  $C_K$  darstellen lässt, auf die Ausgangsspannung aus?**

Der Isolationswiderstand  $R_K$  und die Kapazität  $C_K$  des Koaxialkabels liegen parallel zu den entsprechenden Sensorgrößen  $R_q$  und  $C_q$ .

Der resultierende Gesamtwiderstand ist

$$R_{ges} = R_q \parallel R_K = \frac{R_q \cdot R_K}{R_q + R_K} \quad (12)$$

und die Gesamtkapazität  $C_{ges}$ :

$$C_{ges} = C_q \parallel C_K = C_q + C_K \quad (13)$$

d1) Beim Spannungsverstärker wird die Ausgangsspannung  $u_a(t)^*$  kleiner als  $u_a(t)$  nach Gl. (5), da jetzt die beiden Kapazitäten  $C_q$  und  $C_K$  aufgeladen werden müssen

$$u_a(t_0)^* = U_0^* = \frac{Q_0}{C_q + C_K} = \frac{kF_0}{C_q + C_K} < U_0$$

$$u_a(t)^* = U_0^* e^{-t/\tau_s^*} < u_a(t) \quad (14)$$

mit der Zeitkonstante analog zu Gl. (3) mit den Gl. (12) und (13):

$$\tau_q^* = R_{ges} \cdot C_{ges} = (R_q \parallel R_K) \cdot (C_q \parallel C_K) = \frac{R_q R_K}{R_q + R_K} (C_q + C_K) \quad (15)$$

d2) Beim Ladungsverstärker bleibt das Kabel gemäß Gl. (11) ohne Einfluß. Dies ist ein großer Vorteil, da die Messung unabhängig vom Kabel und seiner Lage ist. Letztere kann sich durch Krümmung oder Biegung sogar während der Messung ändern.

**e) Wie wirkt sich der Eingangsstrom  $I_n$  des OV auf die Ausgangsspannung des Ladungsverstärkers aus?**

Der Eingangsstrom  $I_n$  eines realen Operationsverstärkers führt über den Widerstand  $R_g$  am Ausgang des Ladungsverstärkers zu einer Spannung  $U_{a,os}$

$$U_{a,os} = I_n R_g \quad (16)$$

die sich der Messspannung  $u_a(t)$  überlagert und von dieser im allg. nicht unterschieden werden kann.

- f) **Typische industriell ausgeführte Piezosensoren enthalten zwei Einzelemente. Skizzieren Sie den mechanischen Aufbau eines derartigen Sensors und erläutern Sie dessen Vorteil und Nachteil.**

*Bild 2.100a des Buches zeigt ein derartiges Doppelement. Dessen Vorteil ist, dass die außen liegenden Elektroden miteinander verbunden sind und so im industriellen Einsatz geerdet werden können. Der Nachteil ist der erhöhte Preis des Doppelement-Sensors.*

- g) **Ermitteln Sie die Parameter  $R_{q2}$ ,  $C_{q2}$  und  $k_2$  sowie die Zeitkonstante  $\tau_{q2}$  eines solchen Doppelementes abhängig von den Parametern  $R_q$ ,  $C_q$  und  $k$  eines Einzelementes.**

*Im Doppelement sind 2 Einzelsensoren parallel geschaltet (Bild 2.100a des Buches). Dadurch verdoppelt sich die Kapazität  $C_{q2}$  gegen der des Einzelementes, der Widerstand  $R_{q2}$  halbiert sich, sodass beide Konstruktionen die gleiche Zeitkonstante besitzen.*

$$C_{q2} = 2C_q \quad (17)$$

$$R_{q2} = R_q \parallel R_q = R_q / 2 \quad (18)$$

$$\tau_{q2} = R_{q2} \cdot C_{q2} = \frac{R_q}{2} 2C_{q2} = R_q C_q \Rightarrow \tau_{q2} = \tau_q \quad (19)$$

*Da in beiden Einzelsensoren jeweils die Ladung  $Q$  erzeugt werden, ist die Empfindlichkeit  $k_2$  des Doppelementes doppelt so groß wie die des Einzelementes.*

$$k_2 = \frac{\text{Ladung}}{\text{Kraft}} = \frac{2Q}{F} = 2 \frac{Q}{F} = 2k \quad (20)$$

- h) **Berechnen Sie die Ausgangsspannung  $u_{q2}$  des Doppelsensors ohne nachgeschalteten Verstärker bei einem Kraftsprung.**

*Analog zur Fragestellung a) berechnet sich aus Gl. (1) die beim Kraftsprung im Doppelsensor erzeugte Ladung  $Q_2$ , die doppelt so groß ist wie die Ladung  $Q_0$  des Einzelementes.*

$$Q_{02} = k_2 \cdot F_0 = 2k \cdot F_0 = 2Q_0 \quad (21)$$

*Die Ausgangsspannung  $u_{q2}$  des Doppelsensors berechnet sich analog zu Gl. (2).*

$$u_{q2}(t_0) = U_{02} = \frac{Q_{02}}{C_{q2}} \quad (22)$$

*Mit Gl. (17) und Gl. (21) erhält man das nicht vermutete Ergebnis, dass die Anfangsspannung  $U_{02}$  des Doppelementes gleich der Anfangsspannung  $U_0$  des Einzelementes ist.*

$$u_{q2}(t_0) = U_{02} = \frac{Q_{02}}{C_{q2}} = \frac{2Q_0}{2C_q} = \frac{Q_0}{C_q} \Rightarrow U_{02} = U_0 \quad (23)$$

**i) Berechnen Sie für einen Doppelsensor den Verlauf der Ausgangsspannungen  $u_a(t)$  beider Messverstärker bei einem Kraftsprung.**

*i1) Spannungsverstärker*

*Nach Gl. (1) und Gl. (21) zeigt der Verstärker bei beiden Sensortypen die gleiche Ausgangsspannung  $u_{as}$ .*

$$u_{as}(t) = u_q(t) = 230 \text{ V } e^{-t/10s} \text{ V} \quad (24)$$

*Ein Doppelsensor bringt also bei einem nachgeschalteten Spannungsverstärker keinen Gewinn hinsichtlich der Spannungsamplitude.*

*i2) Ladungsverstärker*

*Beim Doppelement erzeugt die Kraft  $F_0$  nach Gl. (21) die Ladung  $Q_{02} = 2Q_0$ , so dass analog zu Gl. (9) die Ausgangsspannung des Ladungsverstärkers  $U_{aL2}$*

$$u_{aL2}(t = t_0 = 0s) = U_{L02} = \frac{Q_{02}}{C_g} = \frac{k_2 F_0}{C_g} = \frac{2kF_0}{C_q} \frac{C_q}{C_g} = 2 \cdot 2,3 \text{ mV} = 4,6 \text{ mV} \quad (25)$$

*doppelt so groß ist wie die Ausgangsspannung  $u_{aL}$  beim Einzelement nach Gl. (9).*

信